

Сојуз на математичари на Македонија  
 III ОПШТИНСКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ  
 27.02.2016

IV одделение

1. Дадена е табела со цифри. На секој производ од табелата му соодветствува по една буква (пример:  $4 \cdot 3 = 12$ , 12 е цифра за буквата С).

·	3	5	6	10
4	С	К	Д	И
9	У	Е	Н	Г
2	Ј	А	С	К
7	М	Ч	Т	О

Искористи ја дадената табела за да ја дешифрираш следната порака  
 6 10 12  
 21 54 70 90 27  
 12 10 20 10 21  
 24 10  
 27 35 10 21  
 21 10 42 45 21 10 42 40 20 10

**Решение**

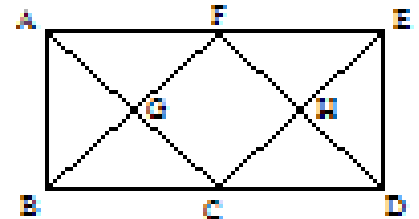
·	3	5	6	10
4	С=12	К=20	Д=24	И=40
9	У=27	Е=45	Н=54	Г=90
2	Ј=6	А=10	С=12	К=20
7	М=21	Ч=35	Т=42	О=70

Дешифрираната порака е  
 6 10 12  
 Ј А С  
 21 54 70 90 27  
 М Н О Г У  
 12 10 20 10 21  
 С А К А М  
 24 10  
 Д А  
 27 35 10 21  
 У Ч А М  
 21 10 42 45 21 10 42 40 20 10  
 М А Т Е М А Т И К А

За табела 15 поени  
 За пораката 10

2. Колку триаголници има на цртежот десно. Испиши ги!

**Решение:** На цртежот се триаголниците:  $ABG$ ,  $BCG$ ,  $CDH$ ,  $DEH$ ,  $EFH$ ,  $FAG$ ,  
 $ABC$ ,  $ABF$ ,  $CDE$ ,  $DEF$ ,  $ACE$ ,  $BDF$  . . . . (20)  
 Значи на цртежот има 12 триаголници. . . . . (5)



3. Учениците во IV-1 играле една игра. Марија замислила еден број и и го кажала на Елена. Таа на бројот му додала 10 и добиениот број му го кажала на Даме. Тој новиот број го поделил со 9 и го кажал на Симе. Симе, пак, бројот што му го кажал Даме го помножил со 2. На крај на таблата Симе го напишал следбеникот на својот број, а тоа е бројот 181. Кој број го замислила Марија?

**Решение.** Бројот на Симе е претходникот на бројот 181, а тоа е бројот 180. (6) Го добил кога бројот на Даме го помножил со 2, значи бројот на Даме е  $180:2=90$ . (6) Даме го добил овој број кога бројот на Елена го поделил со 9, значи бројот на Елена е  $90 \cdot 9 = 810$ . (6) Елена го добила својот број кога на бројот на Марија му додала 10, што значи дека бројот што го замислила Марија е  $810-10=800$ . (7)

4. За нумерирање на страниците на една книга искористени се 639 цифри. Колку страници има книгата?

**Решение.** Едноцифрени броеви се 9 (од 1 до 9). Значи, за првите 9 страни се употребени 9 цифри. (5)  
 Двоцифрени броеви се 90 (од 10 до 99). За овие броеви се искористени  $90 \cdot 2 = 180$  цифри. (5)  
 Досега, за првите  $90+9=99$  страни, се искористени  $180+9=189$  цифри.  
 Остануваат неискористени уште  $639-189=450$  цифри. (5)  
 За трицифрен број се користат 3 цифри, па затоа со овие 450 цифри може да се запишат  $450:3=150$  броеви, т.е. да се нумерираат уште 150 страници. (5)  
 Конечно, книгата има:  $9+90+150=249$  страници. (5)

Сојуз на математичари на Македонија  
III ОПШТИНСКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ  
27.02.2016

---

V одделение

1. Сандра секој ден, од своите родители, добива 50 денари џепарлак. Секоја среда, Сандра ја чува нејзината помала братучетка, за што добива уште 300 денари. Добиените пари Сандра ги штедела за да купи патики. Колку пари ќе заштеди за период од 10 недели?

**Решение.** За една недела Сандра ќе заштеди  $7 \cdot 50 + 300 = 650$  денари. **(15)** Значи, за 10 недели таа ќе заштеди  $10 \cdot 650 = 6500$  денари. **(10)**

2. Пресметај

$$2008 + 2 \cdot (48 \cdot 4 \cdot 14 + 3 \cdot 44 \cdot 16) - (5 \cdot 8 \cdot 43 + 19 \cdot 40 \cdot 3) \cdot 2.$$

**Решение.** Со примена на дистрибутивното својство на множењето во однос на собирањето, односно во однос на одземањето следува:

$$\begin{aligned} 2008 + 2 \cdot (48 \cdot 4 \cdot 14 + 3 \cdot 44 \cdot 16) - (5 \cdot 8 \cdot 43 + 19 \cdot 40 \cdot 2) \cdot 2 &= \\ = 2008 + 2 \cdot (48 \cdot 56 + 48 \cdot 44) - (40 \cdot 43 + 40 \cdot 57) \cdot 2 & \quad (5) \\ = 2008 + 2 \cdot 48 \cdot (56 + 44) - 40 \cdot (43 + 57) \cdot 2 & \quad (5) \\ = 2008 + 2 \cdot 48 \cdot 100 - 40 \cdot 100 \cdot 2 & \quad (5) \\ = 2008 + 2 \cdot 100 \cdot (48 - 40) & \quad (5) \\ = 2008 + 2 \cdot 100 \cdot 8 & \\ = 2008 + 1600 & \\ = 3608. & \quad (5) \end{aligned}$$

3. Петцифрен број исто се чита и одлево и оддесно. Збирот на неговите цифри е 24, а збирот на крајните цифри е 14. Кој е тој број, ако средната цифра е најмала, и не е 0?

**Решение.** Крајните цифри се  $14:2=7$ . **(5)** Збирот на трите средни цифри е  $24-14=10$ . **(5)** Бидејќи цифрите лево и десно се еднакви, средната цифра мора да е парна. Најмала таква цифра е 2. **(5)** Тогаш цифрите околу неа се  $(10-2):2=4$ . **(5)** Не може средната цифра да е поголема или еднаква на 4, бидејќи тогаш нема да биде најмала. Значи, бараниот број е 74247. **(5)**

4. Во триаголникот  $ABC$  важи:  $\overline{AB} + \overline{BC} = 23$ ,  $\overline{AB} + \overline{AC} = 19$  и  $\overline{AC} + \overline{BC} = 18$ . Да се определат периметарот на триаголникот и должините на неговите страни.

**Решение.** Ако ги собереме трите дадени равенства, се добива дека

$$\begin{aligned} 2(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}) &= 23 + 19 + 18 \\ 2(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}) &= 60 & \quad (10) \\ \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} &= 30 \end{aligned}$$

односно периметарот на триаголникот е 30. Од тоа што  $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} = 30$  и  $\overline{AB} + \overline{BC} = 13$  добиваме

$$\begin{aligned} \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} &= 30 \\ 23 + \overline{AC} &= 30 & \quad (5) \\ \overline{AC} &= 30 - 23 \\ \overline{AC} &= 7 \end{aligned}$$

Ако во  $\overline{AB} + \overline{AC} = 19$  замениме  $\overline{AC} = 7$  добиваме  $\overline{AB} + 7 = 19 \Rightarrow \overline{AB} = 12$ . **(5)**

Ако во  $\overline{AC} + \overline{BC} = 18$  замениме  $\overline{AC} = 7$  добиваме  $\overline{BC} + 7 = 18 \Rightarrow \overline{BC} = 11$ . **(5)**

**VI одделение**

1. Две прави се сечат во точка  $S$ . Збирот на острите агли кои при тоа се формираат е еднаков на половина од големината на тапиот агол. Определи ги големините на острите и тапите агли.

**Решение.** Нека  $\alpha$  е остриот, а  $\beta$  тапиот агол. Од условот на задачата следува  $2(\alpha + \alpha) = \beta$ . Значи  $\beta = 4\alpha$ . (7)  
Понатаму,  $\alpha + \beta = 180^\circ$ , (6) па затоа  $\alpha + 4\alpha = 180^\circ$ . Значи,  $5\alpha = 180^\circ$ , т.е.  $\alpha = 36^\circ$ , (6) а  $\beta = 4\alpha = 4 \cdot 36^\circ = 144^\circ$ . (6)

2. Правоаголник има страни со должини 3,8cm и 1,2cm. Пресметај ги периметарот и плоштината на правоаголникот чии должини на страни се еднакви на половина од должините на страните на дадениот правоаголник.

**Решение.** Должините на страните на новиот правоаголник се  $3,8 : 2 = 1,9\text{cm}$  и  $1,2 : 2 = 0,6\text{cm}$ . (9) Периметарот на новиот правоаголник е еднаков на  $2 \cdot (1,9 + 0,6) = 2 \cdot 2,5 = 5\text{cm}$ , (8) а неговата плоштина е еднаква на  $1,9 \cdot 0,6 = 1,14\text{cm}^2$ . (8)

3. Кој е најмалиот четирицифрен број делив со 9, кој има две парни и две непарни цифри? Одговорот да се образложи!

**Решение.** За да еден број биде делив со 9 збирот на неговите цифри треба да биде делив со 9. (5) Бидејќи бројот има две парни и две непарни цифри, збирот на неговите цифри е парен. (5) Значи, збирот на цифрите на бараниот број мора да биде најмалку 18. (5) Овој број ќе биде најмал ако цифрата на местото на илјадитите е 1, а цифрата на стотките е 0. (5) Според тоа, останатите цифри се 8 и 9. Конечно, најмалиот четирицифрен број кој ги задоволува условите на задачата е 1089. (5)

4. Три вторници од некој месец паднале на парни датуми. Кој ден од неделата бил 21-от ден од тој месец?

**Решение.** За да има три вторници на парен датум, во месецот треба да има пет вторници (15) и тоа во вториот, деветтиот, шеснаесеттиот, дваесет и третиот и триесеттиот ден во месецот. (5) Ако се помалку на број, тогаш нема да има три вторници на парен датум. Бидејќи вторник е 23-тиот ден во месецот, значи 21-от ден во истиот месец се паднал во недела. (5)



**VII одделение**

1. Во едно складиште има 1 тон краставици кои содржат 94% вода. После извесно време количеството вода во краставиците се намалило на 92%. Определија новата вкупна маса на краставиците?

**Решение.** Во 1 тон краставици има 94% вода и  $\frac{6}{100} \cdot 1000\text{kg} = 60\text{kg}$  сува материја. (8) Откако количеството вода се намалило на 92%, овие 60kg сува материја сочинуваат 8% од вкупната маса на краставиците(8) т.е. важи  $\frac{8}{100}x = 60$ , па затоа  $x = 750\text{kg}$ . Значи, масата на краставиците после калирањето изнесувала 750kg. (9)

2. Збирот на три броја е 16. Првиот број е  $8\frac{2}{3}$ , а вториот е за  $1\frac{1}{2}$  помал од првиот. Одреди го третиот број.

**решение:**

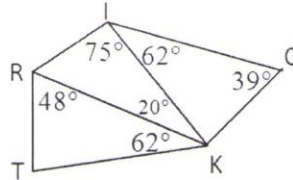
$$8\frac{2}{3} + \left(8\frac{2}{3} - 1\frac{1}{2}\right) + x = 16 \quad (9) \Leftrightarrow \frac{26}{3} + \frac{26}{3} - \frac{3}{2} + x = 16 \Leftrightarrow (8)$$

$$\Leftrightarrow \frac{95}{6} + x = 16 \Leftrightarrow x = 16 - \frac{95}{6} \Leftrightarrow x = \frac{1}{6} \quad (8)$$

3. Ако  $p$  е прост број, тогаш  $p + 2017$  сложен. Докажи!

**Решение.** Ако  $p = 2$ , тогаш  $p + 2017 = 2019 = 3 \cdot 673$ . (10) Ако  $p \geq 3$ , тогаш бидејќи е прост број, тој е непарен број. Но, тогаш  $p + 2017$  е парен број поголем од 2, па затоа е сложен број. (15)

4. Која отсечка има најголема должина во фигурата на цртежот?



**Решение.** Го разгледуваме триаголникот  $RKT$ . Бидејќи збирот на сите внатрешни агли во триаголник е  $180^\circ$ , добиваме дека  $\angle RTK = 180^\circ - 48^\circ - 62^\circ = 70^\circ$ . (5) Бидејќи спроти најголем агол лежи најдолга страна, следува дека  $\overline{RK}$  е најдолга во овој триаголник. (5) Меѓутоа, од триаголникот  $RIK$  следува дека  $\angle IRK = 180^\circ - 75^\circ - 20^\circ = 85^\circ$ , па бидејќи  $\angle IRK$  е најголем агол, најголема страна во овој триаголник ќе биде  $\overline{IK}$ , што значи дека  $\overline{IK}$  е подолга од  $\overline{RK}$ . (5) Понатаму, од триаголникот  $ICK$ ,  $\angle IKC = 180^\circ - 62^\circ - 39^\circ = 79^\circ$ , па  $\overline{IC}$  е подолга од  $\overline{IK}$ . (5) Значи отсечката  $\overline{IC}$  е најдолга. (5)

**VIII одделение**

1. Пресметај ги аглиите на триаголникот  $ABC$  ако се знае дека едниот од аглиите е  $\frac{2}{5}$  од другиот и  $\frac{1}{4}$  од третиот.

**Решение.** Од условот на задачата следува дека  $\alpha = \frac{2}{5}\beta$  и  $\alpha = \frac{1}{4}\gamma$ . (8) Од ова добиваме  $180^\circ = \alpha + \beta + \gamma = \alpha + \frac{5}{2}\alpha + 4\alpha$ . (9) Значи,  $\alpha = 24^\circ$ , па затоа  $\beta = 60^\circ$  и  $\gamma = 96^\circ$ . (8)

2. Нека  $A = 2x^3 - 3x^2 + x$ ;  $B = x^3 + x^2 - 3x$ ;  $C = 5x^2$ . Сведи го на полином во нормален вид изразот:  $C \cdot (A - B)$ .

**решение:**

$$\begin{aligned} C \cdot (A - B) &= 5x^2 \cdot (2x^3 - 3x^2 + x - (x^3 + x^2 - 3x)) = \\ &= 5x^2 \cdot (2x^3 - 3x^2 + x - x^3 - x^2 + 3x) = (9) = 5x^2 \cdot (x^3 - 4x^2 + 4x) = (8) \\ &= 5x^5 - 20x^4 + 20x^3 \quad (8) \end{aligned}$$

3. Ако  $a:7 = b:3 = c:2 = d:5$ , докажи дека важи равенството  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \frac{(7a+3b+2c+5d)^2}{87}$ .

**Решение.** Нека  $a:7 = b:3 = c:2 = d:5 = k$ . (5) Тогаш

$$a = 7k, b = 3k, c = 2k, d = 5k, (5)$$

па затоа

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 + d^2 &= 49k^2 + 9k^2 + 4k^2 + 25k^2 = 87k^2 \quad (5) \\ &= \frac{87^2 k^2}{87} = \frac{(87k)^2}{87} = \frac{(49k+9k+4k+25k)^2}{87} \quad (5) \\ &= \frac{(7a+3b+2c+5d)^2}{87}, (5) \end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

4. Докажи дека разликата на квадратите на секои два непарни природни броеви е делива со 8.

**Решение.** Нека двата броеви се  $2m+1$  и  $2n+1$ , каде  $m$  и  $n$  се природни броеви такви што  $m, n \geq 0$ . (5) Тогаш

$$\begin{aligned} (2m+1)^2 - (2n+1)^2 &= 4m^2 + 4m - 4n^2 - 4n = \\ &= 4(m-n)(m+n) + 4(m-n) = 4(m-n)(m+n+1). \end{aligned} \quad (10)$$

- Ако броевите  $m$  и  $n$  се со иста парност, тогаш множителот  $(m-n)$  е парен број и целиот израз е делив со 8; (5)

- Ако броевите  $m$  и  $n$  се со различна парност, тогаш множителот  $(m-n+1)$  е парен број и затоа изразот е делив со 8. (5)

**IX одделение**

1. Периметарот на еден рамнокрак триаголник е 36 cm. Разликата на должините на кракот и основата е 3 cm. Одреди ја плоштината на триаголникот.

**Решение.** Ако со  $a$  ја означиме основата, а со  $b$  кракот на триаголникот, тогаш од условите на задачата го добиваме системот равенки

$$\begin{cases} a+2b=36 \\ b-a=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+2(3+a)=36 \\ b=3+a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a+6=36 \\ b=3+a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a=30 \\ b=3+a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=10 \\ b=13 \end{cases} \quad (10)$$

Од Питагоровата теорема следува дека висината на триаголникот е  $h^2=13^2-5^2$ , т.е.  $h=12\text{cm}$ . Според тоа, плоштината на триаголникот е  $P=10 \times 12/2=60\text{cm}^2$ . (15)

2. Колку цифри има бројот

$$[1,125 \cdot (10^9)^5] : [\frac{3}{32} \cdot 10^{-4}].$$

**Решение.** Имаме

$$\begin{aligned} [1,125 \cdot (10^9)^5] : [\frac{3}{32} \cdot 10^{-4}] &= [\frac{1125}{1000} \cdot 10^{45}] : [\frac{3}{32} \cdot 10^{-4}] \\ &= (\frac{9}{8} : \frac{3}{32}) \cdot (10^{45} : 10^{-4}) \quad (20) \\ &= (\frac{9}{8} \cdot \frac{32}{3}) \cdot 10^{45-(-4)} = 12 \cdot 10^{49}. \end{aligned}$$

Овој број во својот запис ги има цифрите 1 и 2, а потоа уште 49 нули, што значи дека вкупниот број на цифри е 51. (5)

3. Одреди го бројот на цели броеви  $x$  за кои важи  $\frac{1}{4} < \frac{2-x}{7} < \frac{11}{12}$ .

**Решение.** Имаме

$$\frac{1}{4} < \frac{2-x}{7} < \frac{11}{12} \Leftrightarrow \frac{21}{84} < \frac{12(2-x)}{84} < \frac{77}{84} \Leftrightarrow 21 < 12(2-x) < 77. (10)$$

Бидејќи  $x$  е цел број, следува дека и  $2-x$  е цел број, па имаме дека  $2-x \in \{2,3,4,5,6\}$ , односно  $x \in \{0,-1,-2,-3,-4\}$ . (10) Значи, пет цели броеви ги задоволуваат условите на задачата. (5)

4. Едната страна на триаголник има должина 10cm, а аголот наспроти неа е еднаков на  $150^\circ$ . Пресметај ја плоштината на кругот опишан околу тој триаголник.

**Решение.** Нека  $ABC$  е дадениот триаголник,  $\overline{AB}=10\text{cm}$  и  $\angle ACB=150^\circ$ . (5) Аголот  $\angle ACB$  е периферен, неговиот соодветен централен агол е  $300^\circ$ , (5) од каде следува дека агол  $\angle AOB=60^\circ$ . (5) Значи, триаголникот  $AOB$  е рамностран, па затоа  $\overline{AB}=\overline{AO}=\overline{BO}=10\text{cm}$ . (5)

Според тоа, плоштината на кругот опишан околу дадениот триаголник е  $P=100\pi\text{ cm}^2$ . (5)

