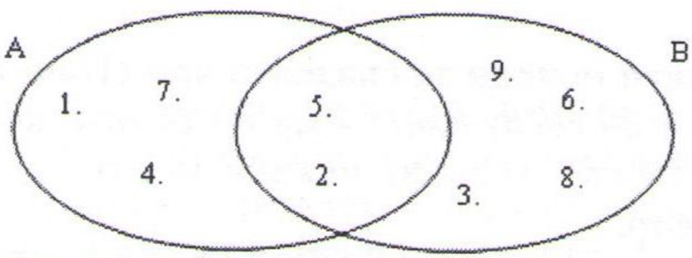
Сојуз на математичари на Македонија
IV ОПШТИНСКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ
25.02.2017

IV одделение

1. Дадени се броевите 1,2,3,4,5,6,7,8 и 9. Запиши ги со Венов дијаграм множествата А и В, ако множеството А е составено од броевите во чиј запис има прави или коси линии, а множеството В е составено од броеви во чиј запис има линии кои не се прави.

Решение:



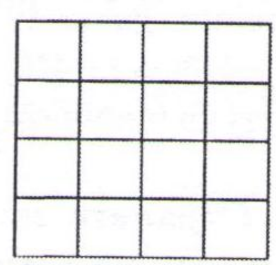
Поени: Секој точно пополнет број во дијаграмот носи по 3 поени, ако е тој нецелосно решен, а ако е целосна задачата се вреднува со 25 поени.

2. Замислив еден трицифрен број. Збирот на неговите цифрите е 15. Цифрата на единици е за 5 помала од 14. Цифрата на десетки е поголема од 0 и помала од 2. Кој број го замислив?

Решение: Ако цифрата на единици е за 5 помала од 14, значи таа е 14-5=9. Ако цифрата на десетки е поголема од 0 и помала од 2, тогаш таа е 1. Бидејќи збирот на цифрите е 15, цифрата на стотки е: 15-9-1=5. Значи, замислениот број е 519.

3. Четвртоодделенците од едно училиште отишле на екскурзија. Биле распоредени во 3 автобуси по 32 ученици. Во хотелот во кој биле сместени, спиеле во двокреветни соби. Колку вкупно соби биле зафатени од учениците?

Решение: Број на ученици: $3\cdot 32=96$. На екскурзија биле вкупно 96 ученици. Број на соби: $96:2=48$. Учениците биле сместени во 48 соби.



4. Квадрат со должина на страна 4*cm* е поделен на 16 мали квадрати со должина на страна 1*cm* (види цртеж).

а) Колку квадрати има на цртежот?

б) Колку отсечки има на цртежот?

Решение: а) На цртежот има: 16 квадрати со страна со должина 1*cm,* 9 квадрати со страна со должина 2*cm,* 4 квадрати со страна со должина 3*cm* и еден квадрат со страна со должина 4*cm.* Значи, на цртежот има вкупно 16+9+4+1=30 квадрати.

б) На цртежот има вкупно 10 отсечки со должина 4*cm.* На секоја од овие отсечки има 4 отсечки со должина 1*cm,* 3 отсечки со должина 2*cm* и 2 отсечки со должина 3*cm*, т.е. вкупно има 9 отсечки. Според тоа, на цртежот има $10 \cdot 9 + 10 = 100$ отсечки.

V одделение

1.Ана треба да испрати покани за свадбата на нејзината сестра. Таа има 2 пакета со покани и во секој пакет има по 24 покани. Треба да покани 60 гости. Дали Ана ќе има доволно покани за сите гости? Објасни го со зборови твојот одговор.

Решение: Вкупно во двата пакети, има $2\cdot 24=48$ покани. Бројот 48 е помал од бројот 60. Значи, Ана има помалку покани од потребното, па нема да има доволно покани за сите гости.

2. Ако од збирот на најголемиот четирицифрен број со различни цифри и најмалиот петцифрен број со различни цифри одземеш непознат број ќе добиеш 20000. Определи го непознатиот број.

Решение: Најголемиот четирицифрен број со различни цифри е бројот 9876, а најмалиот петцифрен број со различни цифри е бројот 10234. Нивниот збир е 9876+10234=20110. Според тоа, бараниот број е 20110-20000=110.

3. Матеј е за 5cm повисок од Лука, кој е 20cm понизок од Ивана. Определи ја висината на секое дете, ако сите тројца се високи вкупно 475cm.

Решение: Нека со l ја означиме висината на Лука. Матеј е за 5cm повисок од Лука, а Ивана е за 20cm повисока од Лука, па од условот збирот на нивните висини да е 475cm, важи $l+5+l+l+20=475 \Leftrightarrow 3l+25=475 \Leftrightarrow 3l=475-25 \Leftrightarrow 3l=450 \Leftrightarrow l=450:3 \Leftrightarrow l=150$.

Оттука висината на Матеј е $150+5=155$ cm, додека на Ивана $150+20=170$ cm.

4. Страната на даден правоаголник се 21 см и 7 см. Со права тој е поделен на еден квадрат и еден правоаголни. Колкава е разликата меѓу периметрите на добиените ликови?

Решение: Ако правоаголникот го поделиме на квадрат и правоаголник, тоа значи дека сме добиле квадрат со страна 7 см и правоаголник со страни 7 см и 14 см. Периметарот на квадратот е $L_1=4\cdot 7=16$ см, а на правоаголникот е $L_2=2(7+14)=2\cdot 21=42$ см. Нивната разлика е $L_2-L_1=42-21=21$ см.

VI одделение

1.Определи ги суплементните агли α и β такви што α е за 12° поголем од β.

Решение: Од условот на задачата имаме $\alpha=\beta+12^\circ$. Понатаму, аглите α и β се суплементни, па затоа $\alpha+\beta=180^\circ$. Ако во последното равенство замениме за α добиваме $(\beta+12^\circ)+\beta=180^\circ$, од каде следува $2\beta=180^\circ-12^\circ$, т.е. $\beta=84^\circ$. Конечно, $\alpha=\beta+12^\circ=84^\circ+12^\circ=96^\circ$.

2.Мајка и на Оливера донела бецови и планирала да ги подели на нејзините другарки подеднакво. Кога размислила како да ги подели на 4, 5 или 6 нејзини другарки, секогаш и останувал по 1 бец неподелен. Колку најмалку бецови имала мајка и на Оливера?

Решение: Најмалиот број на бецови кои можат да се поделат на 4, 5 или 6 девојчиња е НЗС(4,5,6)=60. Но, бидејќи на мајка и на Оливера секогаш и останувал еден бец, значи таа имала вкупно 61 бец.

3. Александар и Елеонора појадуваат. Додека Елеонора јаде по 2 кифлични, Александар изедува по 4 кифлички. После појадокот се покажало дека Александар изел 6 кифлички повеќе од Елеонора. Колку кифлички изеле двајцата заедно?

Решение: За секои две кифлички кои ги изедува Елеонора Александар изедува $4-2=2$ кифлички повеќе. Бидејќи $6:2=3$ добиваме дека Александар изел 3 пати по две кифлички повеќе, односно изел 3 пати по 4 кифлички. Според тоа, Елеонора изела 3 пати по 2 кифлички. Тие двајцата заедно изеле $3\cdot 2+3\cdot 4=18$ кифлички.

4. Кои цифри треба да стојат на местото на a,b за збирот на броевите $\overline{323a}+\overline{b410}$ биде делив со 9?

Решение: Собирајќи ги броевите, може да забележиме дека добиениот збир ќе има 4 или 5 цифри.

Ако збирот е четирицифрен, вредност на b е најмногу 6, а цифрите се: прва $3+b$, втора 6, трета 4, четврта a. За збирот да е делив со 9 треба $3+b+6+4+a=13+a+b$ да е број делив со 9, при што b е најмногу 6. Можни се повеќе случаи:

- $b=6$, збирот е $19+a$, па $a=8$

- $b=5$, збирот е $18+a$, па $a=0$ или $a=9$
- $b=4$, збирот е $17+a$, па $a=1$
- $b=3$, збирот е $16+a$, па $a=2$
- $b=2$, збирот е $15+a$, па $a=3$
- $b=1$, збирот е $14+a$, па $a=4$

Во случај збирот да е петцифрен број, цифрите се петта a, четврта 4, трета 6, втора $b+3-10$ и прва 1. Збирот на цифрите е $a+4+6+b+3-10+1=a+b+4$ каде b прима вредности 7, 8 и 9. Можни се следниве случаи:

- $b=7$, збирот е $11+a$, па $a=7$
- $b=8$, збирот е $12+a$, па $a=6$
- $b=9$, збирот е $13+a$, па $a=5$.

VII одделение

1. Од едно шише сок на растворање од 750 *ml* може да се наполнат 16 чаши од 250 *ml*. Колку шишиња и колку мелилитри сок на растворање се потребни да се добијат 12 *l* растворен сок?

Решение: 16 чаши од 250 *ml* содржат 4000 *ml* = 4 *l* растворен сок. Она што се бара е три пати поголемо количество на растворен сок. Значи ќе ни требаат 3 шишиња сок, во кои има вкупно 2250 *ml* сок.

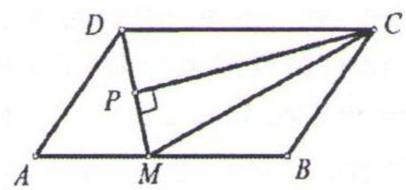
2. Во областа на аголот $\measuredangle AOB$ се повлечени симетралата OC и полуправа OD така што $\measuredangle AOD$ е $\frac{1}{5}$ од аголот $\measuredangle AOB$. Пресметај го аголот $\measuredangle AOB$, ако $\measuredangle COD=30^\circ$.

Решение: Од условот на задачата, $\measuredangle AOD=\frac{1}{5}\measuredangle AOB$, $\measuredangle AOC=\measuredangle BOC$, $\measuredangle COD=30^\circ$ и $\measuredangle AOC+\measuredangle BOC=\measuredangle AOB$. Уште, $\measuredangle AOC=\frac{1}{2}\measuredangle AOB$ и $\measuredangle BOC=\frac{1}{2}\measuredangle AOB$. Па, имаме $\frac{1}{2}\measuredangle AOB-\frac{1}{5}\measuredangle AOB=\measuredangle COD$, односно $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)\measuredangle AOB=\measuredangle COD$, од каде $\frac{3}{10}\cdot\measuredangle AOB=30^\circ$. Оттука, $\measuredangle AOB=100^\circ$.

3. Во едно училиште 30% од учениците се помали од 10 години, $\frac{1}{20}$ имаат точно 10 години, $\frac{3}{10}$ се постари од 10 но помали од 12 години, а останатите 70 ученици имаат 12 и повеќе години. Колку ученици имаат точно 10 години?

Решение: Нека x е вкупниот број на ученици. Тогаш може да ја формираме равенката: $30\% \cdot x + \frac{1}{20}x + \frac{3}{10}x + 70 = x$. Со нејзино решавање се добива $x = 200$. Значи десет години имаат точно $\frac{200}{20} = 10$ ученици.

4. Даден е паралелограм $ABCD$ и точка M на страната AB таква што $\measuredangle AMD = \measuredangle CMD$. Докажи дека ако точката P е средина на отсечката MD, тогаш $CP \perp DM$



Решение. Од условот на задачата имаме $\measuredangle AMD = \measuredangle CMD$. Понатаму, $\measuredangle AMD = \measuredangle CDM$ како агли на трансферзала, па затоа $\measuredangle CDM = \measuredangle CMD$, што значи дека $\triangle CDM$ е рамнокрак и притоа важи $\overline{CM} = \overline{CD}$. Но, точката P е средина на отсечката MD, па затоа CP е симетрала на основата MD, од што следува дека $CP \perp DM$.

VIII одделение

1. Замислив една дропка. Ја помножив со дропката $\frac{5}{6}$, па ја додадов дропката $\frac{3}{4}$ и ја добив дропката $\frac{5}{4}$. Која дропка ја замислив?

Решение:

$$x\cdot\frac{5}{6}+\frac{3}{4}=\frac{5}{4}\Big/\cdot 12$$

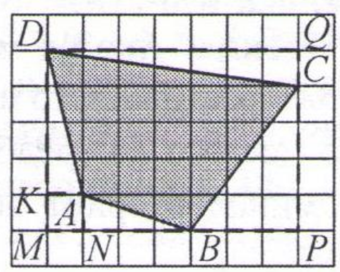
$$10x+9=15$$

$$10x=6$$

$$x=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$$

Значи, дропката што ја замислив е $\frac{3}{5}$.

2.Правоаголникот на цртежот десно е составен од еднакви квадратчиња и има плоштина $252cm^2$. Определи ја плоштината на четириаголникот $ABCD$.



Решение: Правоаголникот од условот на задачата се состои од $9\cdot 7=63$ мали квадратчиња, па затоа плоштината на едно квадратче е $252:63=4cm^2$. Значи, должината на страната на едно квадратче е $2cm$. За бараната плоштина имаме:

$$P=P_{MPQD}-(P_{MNAK}+P_{NBA}+P_{BPC}+P_{CQD}+P_{KAD}).$$

Последователно наоѓаме:

$$P_{MPQD}=7\cdot 5\cdot 4=140cm^2,\ P_{MNAK}=4cm^2,\ P_{NBA}=6cm^2,$$

$$P_{BPC}=24cm^2,\ P_{CQD}=14cm^2 \text{ и } P_{KAD}=8cm^2.$$

Конечно,

$$P=140-(4+6+24+14+8)=84cm^2.$$

3. Во три гајби има 72 кг. јаболка. Во првата гајба има $\frac{4}{5}$ пати повеќе отколку во втората, а во третата има 12 килограми помалку отколку во втората. По колку килограми јаболка има во секоја гајба?

Решение: Нека со x, y и z ја означиме масата на јаболките кои се наоѓаат во првата, втората и третата гајба, соодветно. Тогаш, $x+y+z=72$ и дополнително $x=\frac{4}{5}y$ и $z=y-12$. Следствено, имаме $\frac{4}{5}y+y+y-12=72$, од каде $2y+\frac{4}{5}y=84$, па добиваме дека $\frac{14}{5}y=84$, т.е. $y=30$кг. Конечно, $x=\frac{4}{5}\cdot 30=24$кг., $y=30$кг. и $z=30-12=18$кг.

4. Одреди ги сите прости броеви p такви што и бројот p^3+3^p е прост.

Решение: Нека $p=2$. Тогаш $p^3+3^p=8+9=17$ е прост број. Нека $p>3$ прост број. Тогаш p е непарен. Но, тогаш бројот p^3е исто така непарен, а p^3+3^p е парен како збир од два непарни броеви. Според тоа, само $p=2$ е прост број кој ги задоволува условите на задачата.

IX одделение

1. Од местата А и Б оддалечени едно од друго 120*km* истовремено тргнуваат еден кон друг двајца велосипедисти. Првиот со брзина $10\frac{4}{5}km/h$, а вториот со 12,5 *km/h*. По колку време од тргнувањето велосипедистите ќе се сретнат?

Решение: Ако од местото А до местото на средба на велосипедистите има x *km* (растојанието што го поминал првиот велосипедист), тогаш од местото Б до местото на средба на велосипедистите има $120-x$ *km* (растојанието што го поминал вториот велосипедист).Тие се движат ист временски период, па, имаме:

$$\frac{x}{10\frac{4}{5}}=\frac{120-x}{12,5}$$

$$\frac{5x}{54}=\frac{10(120-x)}{125}$$

$$125x=108(120-x)$$

$$125x+108x=12960$$

$$x=\frac{12960}{233}$$

Времето кое се бара ќе биде: $t=\dfrac{\frac{12960}{233}}{10\frac{4}{5}}=\dfrac{\frac{12960}{233}}{\frac{54}{5}}=\dfrac{5\cdot 12960}{233\cdot 54}=5,15h$

2. Ако $\frac{y}{x}=3$, пресметај ја вредноста на дропката $\frac{3y^2-2xy+x^2}{x^2+xy+y^2}$.

Решение 1:

$$\frac{3y^2-2xy+x^2}{x^2+xy+y^2}=\frac{\frac{3y^2-2xy+x^2}{x^2}}{\frac{x^2+xy+y^2}{x^2}}=\frac{\frac{3y^2}{x^2}-\frac{2xy}{x^2}+\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{xy}{x^2}+\frac{y^2}{x^2}}=$$

$$=\frac{3\left(\frac{y}{x}\right)^2-2\frac{y}{x}+1}{1+\frac{y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2}==\frac{3\cdot 3^2-2\cdot 3+1}{1+3+3^2}=\frac{22}{13}$$

Решение 2: Ако $\frac{y}{x}=3$, тогаш $y=3x$. Имаме:

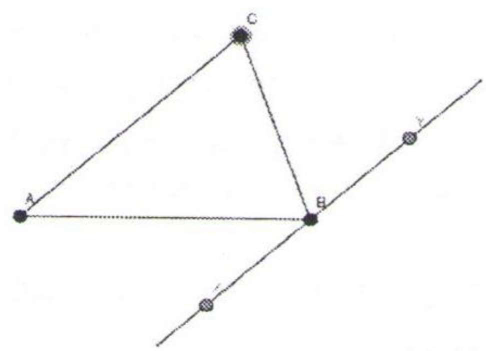
$$\frac{3y^2-2xy+x^2}{x^2+xy+y^2}=\frac{3(3x)^2-2x(3x)+x^2}{x^2+x(3x)+(3x)^2}=\frac{27x^2-6x^2+x^2}{x^2+3x^2+9x^2}=\frac{22x^2}{13x^2}=\frac{22}{13}$$

3. Даден е триаголник ABC. Низ точката B повлекуваме права паралелна со страната AC. На правата избираме две точки X и Y т.ш. X и A лежат во иста полурамнина определена со правата BC, а Y и C лежат во иста полурамнина определена со правата AB. За аглите $\angle XBA, \angle ABC$ и $\angle YBC$ важи $\angle XBA : \angle ABC : \angle YBC = 3:10:5$. Најди ги аглите на триаголникот ABC.

Решение: Од $\angle XBA : \angle ABC : \angle YBC = 3:10:5$ имаме $\angle XBA = 3k$, $\angle ABC = 10k$ и $\angle YBC = 5k$. Од друга страна

$$\angle XBA + \angle ABC + \angle YBC = 180^\circ \Leftrightarrow 3k + 10k + 5k = 180^\circ \Leftrightarrow 18k = 180^\circ \Leftrightarrow k = 10.$$

Следува $\angle XBA = 30^\circ$, $\angle ABC = 100^\circ$ и $\angle YBC = 50^\circ$. Тогаш $\angle BAC = \angle XBA = 30^\circ$, $\angle ACB = \angle YBC = 50^\circ$ како наизменични агли над трансверзала.



4. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{48}.$$

Решение: Ако x и y се природни броеви, тогаш од $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{48}$ следува $x < 48$ и $y < 48$. Од $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{48}$ следува $\sqrt{x} = \sqrt{48} - \sqrt{y}$ и ако квадрираме добиваме $x = 48 - 2\sqrt{48y} + y$. Но, x, y се природни броеви, па затоа од последното равенство следува дека $48y$ мора да е квадрат на природен број. Од $48 = 4^2 \cdot 3$, следува дека $y = 3m^2$, при што $m \in \mathbb{N}$.

За $m = 1$ добиваме $y = 3, x = 27$. За $m = 2$, добиваме $x = y = 12$. За $m = 3$ добиваме $y = 27, x = 3$. За $m \geq 4$, добиваме $y \geq 48$, што не е можно.