4 – одделение

1. Бројот на недели со непарен датум во еден месец е непарен број, а бројот на сите останати денови во тој месец, кои имаат непарен датум е парен број. Во кој ден од седмицата е 29-ти од тој месец? Дали тој месец може да биде март?

Решение 1:

Јасно е дека првата недела од месецот мора да биде број од 1 до 7. Притоа непарен број непарни датуми кои се недела, се возможни ако неделата е 1-ви или 3-ти од месецот. Ако првата недела од месецот е на 3-ти, тогаш следните недели се $10, 17, 24$ и 31. Значи сите останати денови од тој месец со непарен датум се $1, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 19, 21, 23, 25, 27$ и 29, т.е. 13 но тоа не е парен број.	15 бодови
Според тоа бараниот месец ќе започне во недела т.е. недели се: $1, 8, 15, 22$ и 29, а сите други денови со непарен датум се: $3, 5, 7, 9, 11, 13, 17, 19, 21, 23, 25, 27$ кои се вкупно 12. Заради ова месецот мора да започне во недела и да има 30 дена или да е февруари во престапна година.	5 бодови
Конечно, 29-ти од тој месец е во недела и тој месец не може да биде март бидејќи март има 31 ден.	5 бодови

2. Цевка со должина $5m$ е поделена на еднакви делови со 4 сечења. Од секој дел е формиран правоаголник таков што должината е четирипати поголема од ширината. Колку cm изнесува должината на правоаголнкот?

Решение 2:

Со 4 сечења од цевката се добиваат пет дела, секој со должина $5:5=1m$. Од тоа што должината е четири пати поголема од ширината значи дека должината и ширината прават заедно пет еднакви дела.	15 бодови
Од тоа што периметарот на секој правоаголник е 1 метар се добива дека еден дел изнесува $1m:10=100cm:10=10cm$.	5 бодови
Конечно должината на правоаголникот изнесува $40cm$.	5 бодови

3. За призмата која има 7 ѕидови одреди го бројот на рабови и темиња.
Запиши го равенството кое важи меѓу бројот на темиња, рабови и ѕидови за било која призма и потоа провери го дека важи за дадената призма.

Решение 3:

Бројот на рабови на призмата со 7 ѕидови е 15, а бројот на темиња 10.	15 бодови
Равенството гласи: Ѕидови (S) + Темиња (T) = Рабови(P) + 2.	5 бодови
Дека ова равенство важи за дадената призма, се гледа од следниот израз: $7+10=15+2$	5 бодови

4. Збирот на сите страни на два квадрати е 96 cm. Ако страната на едниот квадрат е три пати поголема од страната на другиот квадрат, тогаш пресметај ги должините на страните на двата квадрати.

Решение 4:

Прв начин: Бидејќи страната на поголемиот квадрат е три пати поголема од страната на помалиот квадрат, а квадратот има четири еднакви страни, значи дека периметарот треба да се подели со 16. **Втор начин**: До истиот резултат ке дојдеме ако ја решиме равенката $4\cdot x+4\cdot 3\cdot x=96$, каде x е должината на страната на помалиот квадрат.	15 бодови
Страната на помалиот квадрат изнесува $96:16=6$ cm.	5 бодови
Тогаш страната на поголемиот квадрат е $6\cdot 3=18$ cm.	5 бодови

5 – одделение

1. Над секоја страна на даден правоаголник,надвор од него, конструираме рамностран триаголник. Да се пресмета периметарот на добиената фигура ако периметарот на правоаголникот е $72cm$.

Решение 1:

При конструирање на рамностраните триаголници секоја страна на правоаголникот ја заменуваме со две страни со иста должина.	10 бодови
Според тоа,периметарот на добиената фигура е двапати поголем од периметарот на правоаголникот.	10 бодови
$L = 2 \cdot 72 = 144cm.$	5 бодови

2.Растојанието помеѓу телефонските столбови на една улица долга $1600m$ било $80m$.Заради садење нови дрвца на улицата,столбовите биле разместени така што новото растојание помеѓу столбовите е $50m$. Колку столбови по разместувањето останале на истото место?

Решение 2:

$НЗС(50,80) = 400$	5 бодови
$1600 : 400 = 4$	10 бодови
Неразместени столбови ќе има вкупно $1 + 1600 : 400 = 1 + 4 = 5$ столба. (Првиот столб не се поместува, си останува на своето место)	10 бодови

3. Даден е рамностран триаголник со плоштина $6cm^2$. Над секоја негова страна е конструиран рамностран триаголник. Да се пресмета плоштината на добиената фигура.

Решение 3:

При конструкцијата, над секоја страна на рамностран триаголник конструираме рамностран триаголник со што се добива фигура од 4 исти рамнострани триаголници.	15 бодови
Плоштината на добиента фигура е четири пати поголем од плоштината на рамностраниот триаголник	5 бодови
$P = 4 \cdot 6 = 24cm^2.$	5 бодови

4. Производот на три природни броја е $240.$ Производот на првиот и вториот број е 60 , а производот на првиот и третиот број е $24.$ Кои се тие броеви ?

Решение 4:

Познато е дека: $a \cdot b \cdot c = 240, a \cdot b = 60, a \cdot c = 24.$	5 бодови
Тогаш од $(a \cdot b) \cdot c = 240$ и $a \cdot b = 60$ имаме $60 \cdot c = 240$ односно $c = 4.$	10 бодови
Заради $a \cdot c = 24$ добиваме дека $a = 6.$ Тогаш од $a \cdot b = 60$ добиваме дека $b = 10.$ Значи, бараните броеви се $6,10,4.$	10 бодови

6 – одделение

1.Периметарот на еден рамнокрак триаголник е 3 dm. Пресметај го неговиот крак b, ако неговата основа е страна на рамностраниот триаголник со периметар 18 cm.

Решение 1:

Одредување на страната на рамнокракиот триаголник $a = 18 : 3 = 6$ cm	5 бодови
3 dm = 30 cm	5 бодови
Од периметарот на рамникракиот триаголник $L = a + 2b$ се добива кракот $b = 12$ cm.	15 бодови

2.Две жаби во исто време го напуштаат брегот. Се движат по патека од 18 лилјани (барско растение). Првата скока на секој трет лилјан, а втората на секој втор лилјан. На колку исти лилјани ќе скокнат двете жаби и кои се тие?

Решение 2:

Првата жаба : 3,6,9,12,15,18	10 бодови
Втората жаба: 2,4,6,8,10,12,14,16,18	10 бодови
Двете жаби скокнале на три исти лилјани и тоа: 6 – ти, 12 –ти и 18 –ти.	5 бодови

3. Ако бројот 860 се подели со некој број, се добива остаток 9. Ако бројот 1 200 се подели со истиот број се добива остаток 16. Колку е количникот при делење на бројот 860 со 9, а колку е количникот при делење на бројот 1 200 со 16

Решение 3:

Запис: 860 = $x \cdot k_1 + 9$ и 1200 = $x \cdot k_2 + 16$ или поинаку.	15 бодови
xk_1 =860 – 9 и xk_2 = 1200 – 16 , односно xk_1 =851 и xk_2 = 1184	5 бодови
Факторизација 851 = 37 · 23 и 1184 = 37 · 32, Количниците се 23 и 32.	5 бодови

4. Страните на еден правоаголен триаголник се последователни броеви. Периметарот на правоаголниот триаголник е 12dm. Над секоја страна од триаголникот е конструиран квадрат. Одреди ја плоштината на добиената фигура.

Решение 4:

Ознака за страните на триаголникот x-1, x , x+1 или поинаку.	5 бодови
Запишување на дадениот услов (x-1)+x+(x+1)=12 и одредување на страните на триаголникот. x=4, страните се 3dm,4dm и 5dm.	10 бодови
Плоштини на квадратите се 3·3=9dm^2, 4·4=16dm^2 и 5·5=25dm^2, на триаголникот е 6dm^2, а плоштината на добиената фигура е 6+9+16+25 , односно P=56dm^2.	10 бодови

7– одделение

1. Еден шестцифрен број завршува на цифрата 5. Ако таа цифра се премести на почетокот на бројот, т.е. се избрише од крајот и се допише на почетокот на бројот, тогаш новодобиениот број ќе биде 4 пати поголем од почетниот број. Одреди го почетниот број.

Решение 1:

Нека со x го означиме петцифрениот почеток на почетниот број, односно почетниот број е еднаков на $10x + 5$.	5 бодови
Новодобиениот број може да се запише како $500\,000 + x$,	10 бодови
Од условот на задачата се запишува равенката $4 \cdot (10x + 5) = 500\,000 + x$. Со решавање на равенката се добива дека $x = 128\,200$. Почетниот број е $128\,205$.	10 бодови

2. 2Д формата на цртежот 1 е составена од 4 складни правоаголника, кај кои едната страна е два пати подолга од другата. Пресметај го периметарот на 2Д формата, ако нејзината плоштина е $72cm^2$.

Решение 2:

Ако плоштината на 2Д формата е $72cm^2$, тогаш плоштината на секој правоаголник е $18cm^2$.	10 бодови
Страните на правоаголникот се $6cm$ и $3cm$.	10 бодови
Периметарот на 2Д формата е $48cm$.	5 бодови

3. Во триаголникот ABC симетралите на аглите во темињата A и B се сечат под агол 140°. Висината и симетралата повлечени од аголот во темето C формираат агол од 20°. Одреди ги аглите во триаголникот.

Решение 3:

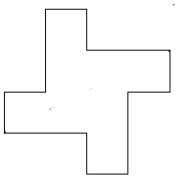
Цртеж 2 и правилни ознаки	5 бодови
Од триаголникот ABF имаме дека $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + 140^\circ = 180^\circ$, т.е. $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 40^\circ$. Од тука $\alpha + \beta = 80^\circ$, па $\gamma = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$.	10 бодови
Бидејќи $\angle ECA = \frac{\gamma}{2} = 50^\circ$ и аголот што го формираат симетралата и висината повлечени од темето C е 20° следи дека $\angle DCA = 30^\circ$. Од правоаголниот триаголник ADC се добива дека $\alpha = 60^\circ$. Збирот на аглите во еден триаголник е 180° од каде $\beta = 20^\circ$.	10 бодови

4. Во спортска продавница патиките се продавале за 900ден. поефтино од тренерката. На акција патиките биле намалени за 10% а тренерката за 5%. Габи купила патики и тренерка на намаление и за нив платила вкупно 5480 ден. Колку чинеле патиките, а колку тренеркатапред намалувањето?

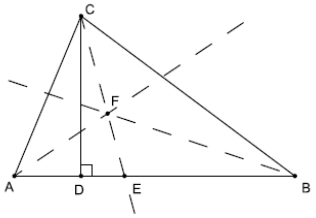
Решение 4:

Цената на патиките пред намалувањето била p, а на тренерките била $p + 900$.	5 бодови

После намалувањето важи: $$\frac{90}{100}p+\frac{95}{100}(p+900)=5480$$	15 бодови
Патиките пред намалувањето чинеле 2500 денари, а тренерката 3400 денари.	5 бодови



Црт.1



Црт.2

8– одделение

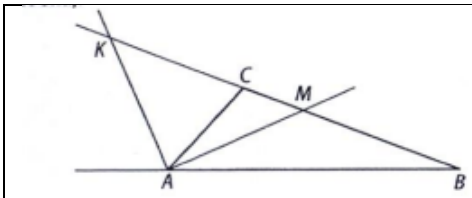
1. На табла се запишани два цели броеви со збир делив со седум. Третиот број се добива како разлика на првиот и вториот, четвртиот – како разлика на вториот и третиот, петтиот – како разлика на третиот и четвртиот, итн. Докажи дека збирот од квадратите на првите седум броја добиени на претходно опишаниот начин е делив со седум.

Решение 1:

Нека првите два членови на низата се $a_1=x, a_2=y$. Нивниот збир е делив со 7, значи постои цел број kза кој важи $x+y=7k$.	5 бодови
За останатите броеви, согласно со начинот на кој се конструираат, добиваме: $a_3=a_1-a_2=x-y,$ $a_4=a_2-a_3=y-(x-y)=2y-x,$ $a_5=a_3-a_4=(x-y)-(2y-x)=2x-3y,$ $a_6=a_4-a_5=(2y-x)-(2x-3y)=5y-3x,$ $a_7=a_5-a_6=(2x-3y)-(5y-3x)=5x-8y.$	5 бодови
${a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2+{a_4}^2+{a_5}^2+{a_6}^2+{a_7}^2=$ $=x^2+y^2+(x-y)^2+(2y-x)^2+(2x-3y)^2+(5y-3x)^2+(5x-8y)^2$ $=$ $=x^2+y^2+x^2-2xy+y^2+4y^2-4xy+x^2+4x^2-12xy+9y^2+$ $+25y^2-30xy+9x^2+25x^2-80xy+64y^2=41x^2-128xy+104y^2=$ $=(42x^2-126xy+105y^2)-(x^2+2xy+y^2)=$ $=21(2x^2-6xy+5y^2)-(x+y)^2=7\cdot3\cdot(2x^2-6xy+5y^2)-(7k)^2=$ $=7\cdot(3(2x^2-6xy+5y^2)-7k^2)$	15 бодови

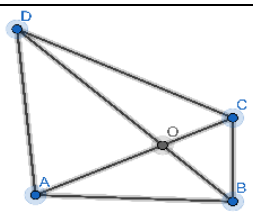
2. Во триаголникот АВС внатрешниот агол кај темето А е 50° . Симетралите на внатрешниот и надворешниот агол кај темето А ја сечат ВС во точките М и К, соодветно. Пресметај ги аглите на триаголникот АВС ако триаголникот АМК е рамнокрак.

Решение 2:

 Аголот МАК е прав агол, па $\measuredangle АМК = \measuredangle МКА = 45^{\circ}$.	10 бодови
Од триаголникот АСМ имаме $\measuredangle АСМ = 180^{\circ} - 45^{\circ} - 25^{\circ} = 110^{\circ}$.	10 бодови
Од триаголникот АВС се добива дека $\measuredangle АВС = 180^{\circ} - 50^{\circ} - 110^{\circ} = 20^{\circ}$.	5 бодови

3. Во конвексниот четириаголник $ABCD$ дијагоналите се сечат во точка O. Ако триаголниците AOB и COD имаат еднакви плоштини, тогаш четириаголникот $ABCD$ е трапез или паралелограм. Докажи!

Решение 3:

$P_{ABD} = P_{AOB} + P_{AOD} = P_{COD} + P_{AOD} = P_{ACD} \cdots (*)$ 	5 бодови
Триаголниците ABD и ACD имаат заедничка страна AD, па од $(*)$ следува дека имаат еднакви висини спуштени кон AD (од B и C соодветно).	10 бодови
Значи, точките B и C се на исто растојание од правата AD. Бидејќи точките се на иста страна од правата AD следува дека $BC \parallel AD$	10 бодови

4. Пресметај: $\frac{2^3 \cdot 4^5 \cdot 6^7}{8^9 \cdot 10^{11}} : 0{,}015^7$.

Решение 4:

$\frac{2^3 \cdot 4^5 \cdot 6^7}{8^9 \cdot 10^{11}} \cdot 0{,}015^7 = \frac{2^3 \cdot (2^2)^5 \cdot 6^7}{(2^3)^9 \cdot 10^{11}} : \left(\frac{15}{1000}\right)^5$	5 бодови
$\frac{2^3 \cdot (2^2)^5 \cdot 6^7}{(2^3)^9 \cdot 10^{11}} : \left(\frac{15}{1000}\right)^5 = \frac{2^3 \cdot 2^{10}}{2^{27} \cdot 10^{11}} \cdot \left(\frac{6 \cdot 1000}{3 \cdot 5}\right)^7$	5 бодови
$\frac{2^3 \cdot 2^{10}}{2^{27} \cdot 10^{11}} \cdot \left(\frac{6 \cdot 1000}{3 \cdot 5}\right)^7 = \frac{1}{2^{27-13} \cdot 10^{11}} \cdot (400)^7 = \frac{\left((2 \cdot 10)^2\right)^7}{2^{14} \cdot 10^{11}} = \frac{2^{14} \cdot 10^{14}}{2^{14} \cdot 10^{11}} = 10^3 = 1000$	15 бодови

9 – одделение

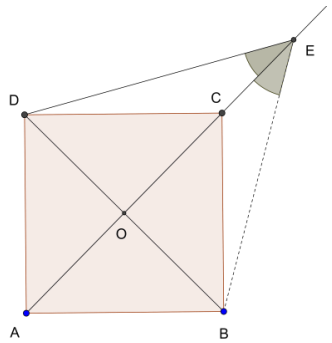
1. За природните броеви a,b,c,d е познато дека $ac+ad+bc+db=68$ и $c+d=4$. Пресметај ја вредноста на изразот $a+b+c+d$.

Решение 1:

Од $ac+ad+bc+db=68$ добиваме дека $a\cdot(c+d)+b\cdot(c+d)=68$ односно $(a+b)\cdot(c+d)=68$.	10 бодови
Од тоа што $c+d=4$ ...(1) добиваме $(a+b)\cdot 4=68$. Значи, $a+b=17$ ...(2).	10 бодови
Со собирање на равенствата (1) и (2) добиваме $a+b+c+d=21$.	5 бодови

2. Даден е квадрат $ABCD$. На продолжението на дијагоналата AC е избрана точка E така што $\overline{DE}=\overline{AC}$. Одреди ја големината на аголот DEC.

Решение 2:

 Нека точката O е пресекот на дијагоналите. Тогаш имаме дека $\overline{BO}=\overline{DO}$. Од условот на задачата имаме дека $\overline{DE}=\overline{AC}$. Од тоа што $ABCD$ е квадрат имаме дека $\overline{BD}=\overline{AC}$.	10 бодови
Значи, $\overline{BD}=\overline{DE}$ ...(1). Од друга страна имаме дека отсечката BE е слика на отсечката DE при осна симетрија во однос на правата AC. Така добиваме дека $\overline{BE}=\overline{DE}$ ...(2). Од (1) и (2) заклучуваме дека триаголникот BED е рамностран. Значи $\angle BED=60^\circ$.	10 бодови
Од складноста на триаголниците BOE и DOE имаме дека $\angle DEO=\angle BEO=30^\circ$. Значи, $\angle DEC=\angle DEO=30^\circ$.	5 бодови

3. Одреди ги природните броеви a, b и c кои ги исполнуваат релациите:

$$a^2+ab+ac=20,$$

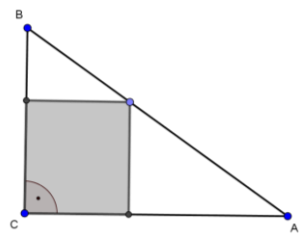
$$ab+b^2+bc=30 \text{ и}$$

$$ac+bc+c^2=50.$$

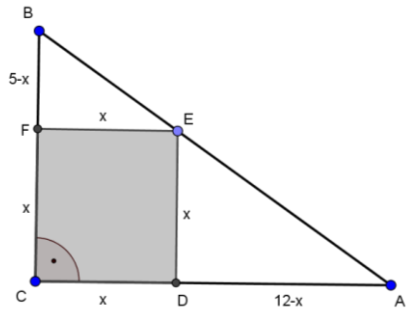
Решение 3:

Дадените релации ги запишуваме во облик $a(a+b+c)=20$, $b(a+b+c)=30$ и $c(a+b+c)=50$.	10 бодови
Со нивно собирање добиваме $a(a+b+c)+b(a+b+c)+c(a+b+c)=100$, $(a+b+c)(a+b+c)=100$, т.е. $(a+b+c)^2=100$.	10 бодови
Имајќи во предвид дека a, b и c се природни броеви, оттука следува дека $a+b+c=10$. Од ова равенство и дадените услови во задачата добиваме дека бараните броеви се $a=2$, $b=3$ и $c=5$.	5 бодови

4.Пресметај ја плоштината на квадратот впишан во правоаголен триаголник со хипотенуза $13cm$ и катета $5cm$ (види цртеж).



Решение 4:

 Нека $c=13$, $a=5$ тогаш од питагорова теорема имаме $5^2+b^2=13^2$ односно $b^2=144$, т.е. $b=12$.	10 бодови
Од сличноста на триаголниците AED и EBF ја добиваме пропорцијата $(12-x):x=x:(5-x)$. На тој начин имаме $(12-x)\cdot(5-x)=x^2$ од каде се добива дека $x=\frac{60}{17}$.	10 бодови
Од формулата за плоштина на квадрат добиваме дека $P=x^2=\frac{3600}{289}$.	5 бодови